MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA		
EXAMEN	MATHEMATIQUES	FEUILLE DE TD N° 1	Classe : 2^{nde} C_2
COEFF. 6	Thème 1 : ENSEMBLE DES NOMBRES REELS		Date :16/09/2013

EXERCICE 1 Raisonnons par l'absurde.

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. En déduire que $1+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $-3\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. Démontrer que pour tout nombre premier p , $\sqrt{p}$ est irrationnel.
4. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $r+x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$, $r \times x \notin \mathbb{Q}$.

EXERCICE 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n>2)$, on pose $A=\dfrac{3n+6}{n-2}$.

1. Vérifier que $A=3+\dfrac{12}{n-2}$
2. Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que $A \in \mathbb{N}$?

EXERCICE 3

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$.
   (b) Simplifier alors l'expression $A=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\dfrac{1}{4\times 5}+...+\dfrac{1}{2013\times 2014}$.
2. Calculer $B=\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{6}\right)\times...\times\left(1+\dfrac{1}{999}\right)$.

EXERCICE 4

1. Montrer que $y=\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ est un entier naturel.
2. Montrer que $2^{2013}-2^{2012}-2^{2011}-2^{2010}=2^{2010}$.
3. Soient a et b deux réels strictement positifs et distincts.
   (a) Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.
   (b) Montrer que $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a+b}$; $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}>2$.

EXERCICE 5

Soient x et y deux réels vérifiant : $\dfrac{5}{3}<x<5$ et $-2<y<-1$.

1. Encadrer $C=-3x+2y$ et $D=\dfrac{y^2+1}{x}$.
2. Montrer que $-10<xy<-\dfrac{5}{3}$.

Prof : T .N . AWONO MESSI

EXERCICE 6

Dire en justifiant si l'affirmation proposée est vraie ou fausse.

1. $\left(1-\sqrt{2}\right)x>1$ équivaut à : $x>\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$.
2. $\sqrt{(3-\pi)^6}=(3-\pi)^3$.
3. La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
4. $\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\times\ldots\times\left(1+\dfrac{1}{20}\right)=7$.
5. Tout nombre impair est premier.
6. $\left\{-\sqrt{3};0;2\right\}\subset\mathbb{N}$.

EXERCICE 7 Un peu de logique

Soit la proposition suivante : « S'il pleut , je prends un parapluie ».

Est-ce que cela veut dire que si vous me rencontrer dans la rue avec un parapluie , il pleut ?

EXERCICE 8

On définit l'opération * sur $\mathbb{R}$ par : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x*y=xy+\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)$.

1. Calculer $1*(2*3)$, puis $(1*2)*3$. La loi * est-elle associative ?
2. Montrer que 1 est l'élément neutre pour la loi *.

EXERCICE 9

Soit a , b et c trois réels tels que : $a+b+c=0$.

1. **(a)** Factoriser a^3+b^3.

   (b) Montrer que $a^2+b^2=c^2-2ab$.

   (c) En déduire que $a^3+b^3+c^3=3abc$.
2. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $(-2x+1)^3+(3x-4)^3+(-x+3)^3=0$.

EXERCICE 10

1. Soit N un nombre entier naturel impair. Montrer que N^2 est impair.
2. Simplifier l'expression $A=\dfrac{3+\left|3-2\sqrt{7}\right|-\left(\pi+\sqrt{7}\right)}{\sqrt{\left(\pi-\sqrt{7}\right)^2}}+1$.
3. On pose : $B=\left\{2+\dfrac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$

   (a) Montrer que $B\neq\emptyset$, puis vérifier que $B\subset\mathbb{R}$.

   (b) Démontrer que B est minoré par 2 .
4. **(a)** Calculer $C=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2013}\times\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2013}$.

   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $5^n+5^n+5^n+5^n+5^n=5^{n+1}$

EXERCICE 11

1. On pose : $A=\sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}+\left(\sqrt{2}-2\right)^2-\sqrt{18}$

   Montrer en détaillant toutes les étapes de vos calculs que $A=5-5\sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1}>x$.
3. Montrer que pour tous réels $a,b\in\mathbb{R}_+$, $\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2=2\left(a+b\right)$.
4. Soient a,b et c trois réels deux à deux distincts.

   (a) Montrer que $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}=0$.

   (b) Montrer que $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c$.

EXERCICE 12

1. Soit $p\in\mathbb{R}_+$. Montrer que $\sqrt{p+1}-\sqrt{p}$ est l'inverse de $\sqrt{p+1}+\sqrt{p}$.
2. Calculer : $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{63}+\sqrt{64}}$.
3. Déterminer le plus grand entier naturel n tel que :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\leq 9 .$$

EXERCICE 13

Trouver les réels p , q et r tels que $\begin{cases}\dfrac{p}{3}=\dfrac{q}{4}=\dfrac{r}{6}\\ p+q+r=26\end{cases}$

EXERICE 14

1. Ecrire plus simplement chacun des réels suivants :

$$A=\frac{4\times10^{-8}+0,0000005}{29\times10^{-6}-20\times10^{-7}}\ ;\ B=\frac{3-\frac{2}{5}+\frac{4}{3}}{2+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}\ ;\ C=\frac{4\sqrt{175}-3\sqrt{28}-2\sqrt{252}}{4\sqrt{7}}\ ;\ D=\sqrt{\frac{2^{14}+16^6}{4^6+2^{22}}}$$

2. a,b et c sont trois nombres positifs tels que $a\leq b+c$. on pose : $P=\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{b}{b+1}-\dfrac{c}{c+1}$

   (a) Montrer que $P=\dfrac{a-b-c-2bc-abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}$.

   (b) Donner en justifiant le signe de P. Déduisez-en que : $\dfrac{a}{a+1}\leq\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}$.

EXERCICE 15

1. Montrer que pour tout x réel positif , on a : $1-x\leq\dfrac{1}{1+x}\leq 1-x+x^2$
2. En déduire les valeurs approchées de $\dfrac{1}{1,02}$.
3. Montrer que si x et y sont deux réels tels que : $|x|<1$ et $|y|<1$, alors : $\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|<1$

   Indication : on pourra développer $(1-x)(1-y)$ *et* $(1+x)(1+y)$.

Prof : T .N . AWONO MESSI

EXERCICE 16

Soit p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $p < q$. On pose :

$$a = \frac{p+q}{2}; g = \sqrt{pq} \quad \text{et} \quad h = \frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$$

1. Démontrer que : $p < h$ et $a < q$.
2. Démontrer que : $g < a$.
3. Démontrer que : $g^2 = ah$. En déduire que $h < g$.
4. Ranger dans l'ordre croissant les nombres p, q, a, g et h.

EXERCICE 17

1. Déterminer tous les nombres entiers relatifs n tels que $\frac{n}{7} \in \left[-\frac{7}{9}; \frac{5}{11}\right]$
2. Recopier et compléter le tableau suivant :

Intervalle	Encadrement	Distance	Valeur absolue	Représentation
	$-2 \leq x \leq 6$			
		$\lvert x\rvert \geq 1$		
			$\lvert x+2\rvert \leq \frac{1}{4}$	
$[-0,5;1,5]$				

EXERCICE 18

1. Trouver un entier relatif p tel que $100 \times 10^p = \frac{1}{10^{3p}} \times 10^{10}$.
2. x , y et z sont trois réels positifs.
   (a) Démontrer que $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ [1].
   (b) En utilisant l'inégalité [1] et deux autres inégalités du même type ;
   Démontrer que $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$.

EXERCICE 19

On définit l'opération $*$ sur $\mathbb{R}$ par : pour tous a , $b \in \mathbb{R}$, $a * b = a + b - 1$.

1. Montrer que pour tous a , $b \in \mathbb{R}$, $a * b = b * a$.
2. Montrer que pour tous réels a , b , c , on a : $a * (b * c) = (a * b) * c$.
3. Montrer que pour tout réel a , $a * 1 = a$.
4. Montrer que pour tout réel a , $a * (2 - a) = 1$.
5. Que peut-on en déduire pour $(\mathbb{R}, *)$?

Bon Travail….

Prof : T .N . AWONO MESSI