Lycée Bilingue de Mbanga
Département de Mathématiques
Séquence 5
Examinateur : M. KENMOGNE

Année scolaire 2013-2014
Classe : $1^{ere}D$
Durée : 3h Coef : 4
www.easy-maths.org

Epreuve de Mathématiques

L'épreuve comporte trois exercices, tous obligatoires. Le candidat devra justifier autant que possible ses affirmations.

Exercice 1 [5,75pts]

Partie A :

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont-on connait deux termes $w_{15} = \frac{5}{4}$ et $w_{37} = \frac{59}{4}$.

1. Calculer le premier terme w_0 et la raison r de cette suite. En déduire l'expression de w_n en fonction de n. 0,75pt
2. Calculer la somme des termes consécutifs du 16^{ieme} au 38^{ieme}. 0,5pt

Partie B :

Soient (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par : $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ et $v_n = u_n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. a) Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n). 1pt
   b) Que peut-on conjecturer quand à : La monotonie de (u_n) ? la convergence de (u_n) ? 0,5pt
2. a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. 0,75pt
   b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. 0,5pt
   c) Démontrer les conjectures faites en 1.b). 0,75pt
3. On pose $T_n = v_2 + v_3 + \cdots + v_n$ et $S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.
   Calculer T_n puis S_n en fonction de n . 1pt

Exercice 2 [*02,25 points*]

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle,
$BCC'B'$ et $DCC''D'$ sont des carrés.
On supposse que l'aire totale des parties hachurées vaut 169 cm^2
et l'aire de la partie non hachurée est égale à 60 cm^2.
On pose $AB = x$ et $BC = y$ $(x > y)$.

1. Démontrer que x est solution de l'équation $(E) : t^4 - 169t^2 + 3600 = 0$. 1pt
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E). 1pt
3. En déduire les dimensions x et y du rectangle. 0,25pt

Exercice 3 *04,5 points*

I. A et B sont deux points distincts du plan tels que tel que $AB = 9cm$. Soit K le point défini par : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et M un point quelconque du plan.

1. Montrer que $K = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 2 & 1 \\ \hline\end{array}$. 0,25pt
2. Déduire que $2MA^2 + MB^2 = 3MK^2 + \frac{2}{3}AB^2$. 0,5pt
3. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan tels que $2MA^2+MB^2 = 81$. 0,75pt

II. On considère l'expression $p(x) = \cos 4x - 5\cos 2x + 2$ dans laquelle x appartient à l'intervalle $]-\pi\ \pi]$.

1. Montrer que $p(x) = 2\cos^2 2x - 5\cos 2x + 1$. 0,5pt
2. Résoudre alors l'équation $p(x) = -1$. 2pts
3. Représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométrique. 0,5pt

Problème [***7,5 points***]

On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = \frac{2x^2-3x+3}{1-2x}$.

$(\mathcal{C})$ désigne sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a) Déterminer le domaine de définition D de g. 0,5pt
   b) Calculer les limites de g aux bornes de D. 1pt
   c) En déduire l'équation d'une asymptote à $(\mathcal{C})$. 0,25pt
2. a) Montrer que pour tout $x \in D$, $g(x) = -x + 1 - \frac{2}{2x-1}$. 0,5pt
   b) En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (Δ) dont on précisera une équation. 0,5pt
   c) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ). 0,5pt
3. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. 2pts
4. Tracer soigneusement les deux asymptotes et la courbe $(\mathcal{C})$. 1,25pt
5. Déterminer graphiquement suivant les valeurs du réel k le nombre de solutions de l'équation $(E_k) : 2x^2 + (2k-3)x - k + 3 = 0$. 1pt

Si l'esprit de quelqu'un s'égare, faites-lui étudier les mathématiques
car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. (Francis Bacon)

Bonne Chance à tous ! ! !