Chapitre 1

Calcul littéral

1.1 Rapports

Définition 1.1. *On appelle rapport d'un premier nombre a, à un second nombre b, le quotient exact de a par b. Le rapport s'écrit sous la forme d'une fraction.*

- *le premier nombre a est le numérateur du rapport ;*
- *le second membre b est le dénominateur du rapport ;*
- *a et b sont les termes du rapport.*

Exemple 1.1.

- *Le rapport de 6 à 4 est* $\frac{6}{4} = 1,5$.
- *Le rapport de 4 à $(-0,25)$ est* $\frac{4}{-0,25} = -16$.
- *le rapport de $\frac{9}{11}$ à $\frac{3}{22}$ est* $\frac{\frac{9}{11}}{\frac{3}{22}} = \frac{9}{11} \times \frac{22}{3} = 6$.

1.2 Propriétés des rapports

Ce sont les mêmes que celles des fractions ordinaires.

1. On ne change pas la valeur d'un rapport si on multiplie ou divise ses deux termes par un même nombre non nul.
$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb} \quad k \neq 0, \quad b \neq 0.$$
2. Les opérations sur les rapports sont soumises aux mêmes règles que les opérations sur les fractions.
   (a) Somme algébrique de deux rapports :
   $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$
   (b) Produit de deux rapports :
   $$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
   (c) Quotient de deux rapports.
   $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

1.3 Proportions

Définition 1.2. *On appelle proportions l'égalité de deux rapports. Ainsi, les rapports* $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{3}{6}$ *étant égaux,* $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ *est une proportion qui s'énonce : « 1 est à 2 comme 3 est à 6 ».*

Une proportion comprends quatre termes :

$$\begin{array}{ccccc} 1^{er}\text{ terme} & & & & 3^{eme}\text{ terme}\\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ 2^{eme}\text{ terme} & & & & 4^{eme}\text{ terme}\end{array}$$

Le premier et le quatrième termes sont appelés les extrêmes.
Le second et le troisième terme sont appelé les moyens.

Proposition 1.1. *Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

$$Si \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad alors \quad ad = bc.$$

Proposition 1.2. *Si le produit de deux nombres est égal au produit de deux autres nombres, ces quatre nombres peuvent former une proportion.*

$$Si \quad ad = bc, \quad alors \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Exercice 1.1. On considère la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

1. Montrer que $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ et $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.
2. Déduire que $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$ et $\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}$
3. Déduire que $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$.

1.4 Calcul littéral

1.4.1 Puissance à exposant entier relatif

a est un nombre non nul. m et n sont deux nombres entiers naturels tels que $m > n$. En classe de 4eme, on a vu que

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

On voudrait pouvoir écrire par exemple $\frac{8^4}{8^7} = 8^{4-7} = 8^{-3}$. On sait que $\frac{8^4}{8^7} = \frac{1}{8^3}$. On convient alors de dire que $8^{-3} = \frac{1}{8^3}$.

Notation 1.1. *a est un nombre non nul, n est un entier naturel différent de 0. L'inverse de a^n est noté a^{-n}.*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a^n \times a^{-n} = 1$$

Par convention, on pose $a^0 = 1$ pour tout $a \neq 0$.

Proposition 1.3. *a et b sont des nombres différents de 0, m et n sont des nombres entiers relatifs.*

$a^n \times b^n = (a \times b)^n$; $a^m \times a^n = a^{n+m}$; $(a^m)^n = a^{m\times n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Exemple 1.2. $a^{-4}\times b^{-4} = (a\times b)^{-4}$; $a^{-3}\times a^5 = a^2$; $(a^m)^n = a^{m\times n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

1.4.2 Développement et réduction

Suppression des parenthèses

a et b sont deux nombres, on a :

$$\begin{aligned} a+(b-c) &= a+b-c \\ a-(b+c) &= a-b-c \\ a-(b-c) &= a-b+c \end{aligned}$$

Règle de priorité

La multiplication est prioritaire sur l'addition et sur la soustraction.
L'élévation à la puissance est prioritaire sur la multiplication.

Développement d'un produit, factorisation

x, y et z sont des nombres ; on a :

$x(y+z) = xy + xz$, $x(y-z) = xy - xz$.

Egalités remarquables

a et b sont deux nombres ; on a :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\ (a-b)(a+b) &= a^2-b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{aligned}$$

Exemple 1.3. *Développer et réduire :* $A = (3x+1)(-x-4)$, $B = (x+7)^2 - (2x-3)^2 + 8x$.

$$\begin{aligned} A &= 3x^2-12x-x+4 \\ &= 3x^2-13x+4 \\ B &= x^2+14x+49-(4x^2-12x+9)+8x \\ &= x^2+14x+49-4x^2+12x-9+8x \\ &= -3x^2+34x+40 \end{aligned}$$

Exercice 1.2. *Développe et réduis les expressions littérales suivantes :*

- $5x(x+3) - 4x(x-2)$;
- $(2x-5)(3x-1)$;
- $(2x-3)(3-2x)$;
- $(x+6)(x-4) - (x-3)^2$;
- $(x+4)^2$;
- $(\frac{3}{4}x-1)^2$.

1.4.3 Factorisation

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

Mise en évidence d'un facteur commun

Définition 1.3. *Un facteur est commun à tous les termes d'une expression, s'il divise chacun des termes de cette expression.*

Exemple 1.4. *Le facteur* $(x+4)$ *est un facteur commun dans* $A = (x+4)(2+x) - 3(1-x)(x+4)$.

On se propose de factoriser les expressions suivantes :

- $x(2x+1) - 5(2x+1)$.
- $B = x(x-1) + 3(1-x)$.

Pour le cas de A :

Première étape : identification du facteur commun. Le facteur commun dans A est $(2x+1)$.

Deuxième étape : mise en facteur On le met en facteur $(2x+1)[x-5]$

Troisième étape : factorisation La forme factorisée est $A = (2x+1)(x-5)$.

Pour le cas de B :

Première étape : identification du facteur commun. En réecrivant B sous la forme $B = x(x-1) - 3(x-1)$, le facteur commun est $x-1$.

Deuxième étape : mise en facteur On le met en facteur $(x-1)[x-3]$

Troisième étape : factorisation La forme factorisée est $B = (x-1)(x-3)$.

L'on peut aussi utiliser les identités remarquables pour factoriser une expression.